

C) Exponenciální a logaritmické funkce a rovnice

§1. Exponenciální funkce

Def.: Necht' $a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$. Pak funkci $f: y = a^x$ nazýváme exponenciální funkcí o základu a .

Pozn.: a) $D(f) = \mathbf{R}$

b) $\forall x \in \mathbf{R} : f(x) > 0 \Rightarrow H(f) = \mathbf{R}^+$

c) $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\} : a^0 = 1 \Rightarrow$ graf každé exponenciální funkce prochází bodem $[0,1]$

V.1.1.: Necht' $f: y = a^x, a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ je exponenciální funkce. Pak platí:

1) f není ani sudá ani lichá

2) $a > 1 \Rightarrow f$ je rostoucí

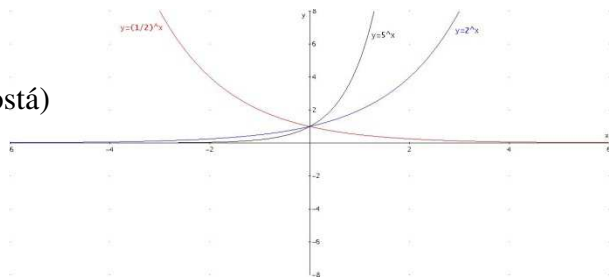
$0 < a < 1 \Rightarrow f$ je klesající

f je vždy ryze monotónní (tedy prostá)

3) f je zdola omezená

4) f nemá extrémy

5) f není periodická



Pozn.: Uvažujme přímku $p: y = x + 1$. Hledáme základ a funkce $f: y = a^x$ tak, aby p byla tečna ke grafu funkce f .

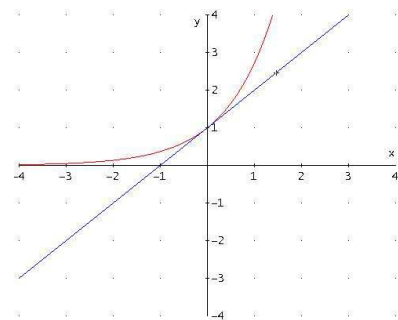
Protože graf obou funkcí prochází bodem $[0;1]$, je tento bod i bodem dotyku. Hledaným základem je tzv.

Eulerovo číslo, značí se $e = 2,71828182845904523\dots$

(e je iracionální). Budeme tedy psát $f: y = e^x$

přirozená exponenciální funkce

$$\left[e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$$



§2. Exponenciální rovnice

Pozn.: Exponenciální rovnici rozumíme rovnici s neznámou v exponentu.

Řeší se zpravidla na základě následující věty.

V.2.1.: $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} : a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

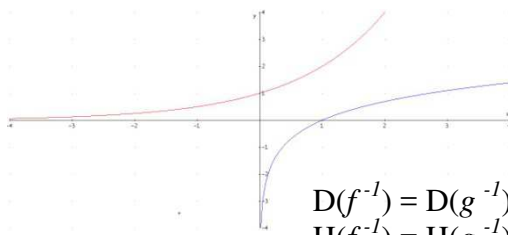
[Dk.: Plyne bezprostředně z toho, že exponenciální funkce je prostá]

Př.!

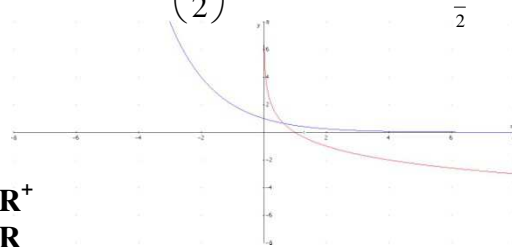
§3. Logaritmická funkce, logaritmus

Př.: Nakreslete grafy inverzních funkcí k funkcím f a popište jejich vlastnosti.

a) $f: y = 2^x$ $f^{-1}: y = \log_2 x$



b) $g: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $g^{-1}: y = \log_{\frac{1}{2}} x$



$D(f^{-1}) = D(g^{-1}) = \mathbf{R}^+$
 $H(f^{-1}) = H(g^{-1}) = \mathbf{R}$
 f^{-1}, g^{-1} není ani sudá ani lichá
 f^{-1} - rostoucí, g^{-1} - klesající
 f^{-1}, g^{-1} neomezené, bez extrémů, neperiodické

Def.: Necht' $a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$. Pak inverzní funkci k exponenciální funkci $f: y = a^x$ nazýváme logaritmickou funkcí o základu a , zapisujeme $f^{-1}: y = \log_a x$.

Pozn.: a) $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbf{R}^+$, $H(f^{-1}) = D(f) = \mathbf{R}$
 b) Graf každé logaritmické funkce prochází bodem $[1,0]$.

V.3.1.: Necht' $f: y = \log_a x$, $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ je logaritmická funkce. Pak platí:

- 1) f není ani lichá ani sudá
- 2) pro $a > 1$... f je rostoucí
 pro $a \in (0; 1)$... f je klesající
- 3) f je vždy prostá
- 4) f není omezená ani shora ani zdola
- 5) f nemá extrémy
- 6) f není periodická

Def.: Necht' $f: y = \log_a x$, $a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$, je logaritmická funkce a $x_0 \in D(f)$. Pak číslo $f(x_0)$ nazýváme logaritmem čísla x_0 o základu a .

Pozn.: Platí tedy, že: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

Vlastnosti logaritmů

V.3.2.: $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$: a) $\forall x \in \mathbf{R}^+: a^{\log_a x} = x$

b) $\forall x \in \mathbf{R}: \log_a a^x = x$

[Dk.: a) $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$

b) $a^x = r \Leftrightarrow \log_a r = x$

$$a^{\log_a x} = a^r = x$$

$$\log_a a^x = \log_a r = x]$$

V.3.3.: $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+: \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

[Dk.: Plyne z toho, že logaritmická funkce je prostá]

V.3.4.: $\forall a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1, b \neq 1$: a) $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

b) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

Pozn.: a) V.3.4.a) se využívá k výpočtu logaritmů, neboť platí: $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$. Položíme-li

totiž $a = 10$, dostáváme tzv. dekadické logaritmy, které označujeme jen $\log$ ($\log_{10} x = \log x$) a hodnoty najdeme v tabulkách.

b) V.3.4.b) se často používá ve tvaru $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

V.3.5.: $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}, \forall x \in \mathbf{R}^+$: a) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

b) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

V.3.6.: $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}, \forall x, y \in \mathbf{R}^+, \forall r \in \mathbf{R}$:

a) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

Pozn.: Záписy mocnin: $n \in \mathbf{N}$: $\log_a x^n = \log_a \left(\underbrace{x \cdot x \dots x}_n \right)$

$$\log_a^n x = \underbrace{\log_a x \cdot \log_a x \dots \log_a x}_n$$

Dekadický a přirozený logaritmus

Def.: Necht' $x \in \mathbf{R}^+$. Dekadickým logaritmem čísla x rozumíme jeho logaritmus o základu 10. Zapisujeme $\log x$.

Pozn.: Funkce $f: y = \log x$ je rostoucí.

Pozn.: Každé reálné kladné číslo m ($m \in \mathbf{R}^+$) lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $m = m_1 \cdot 10^c$, kde $m_1 \in \langle 1; 10 \rangle$, $c \in \mathbf{Z}$.

V.3.7.: Necht' $m \in \mathbf{R}^+$. Pak platí: $\log m = \log m_1 + c$, kde $\log m_1 \in \langle 0; 1 \rangle$, $c \in \mathbf{Z}$, přičemž toto vyjádření je jednoznačné.

Def.: Necht' $m \in \mathbf{R}^+$, $\log m = \log m_1 + c$, kde $\log m_1 \in \langle 0; 1 \rangle$, $c \in \mathbf{Z}$. Pak číslo $\log m_1$ nazýváme mantisou a číslo c charakteristikou čísla $\log m$.

Př.: a) $251,8 \Rightarrow \log 251,8 = \log 2,518 + 2$
b) $0,0008 \Rightarrow \log 0,0008 = \log 8 - 4$

Def.: Necht' $x \in \mathbf{R}$. Přirozeným logaritmem čísla x rozumíme logaritmus o základu e -Eulerovo číslo ($e = 2,718$). Zapisujeme $\ln x$.

Pozn.: Funkce $f: y = \ln x$ je rostoucí a platí: $\ln x = \frac{\log x}{\log e}$ $\log e = 0,434294$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad \ln 10 = 2,302585$$

§4. Logaritmické rovnice

- Pozn.:** a) Logaritmickou rovnicí nazýváme rovnici, kde se neznámá vyskytuje v logaritmickém výrazu (termu).
b) Logaritmické rovnice se řeší na základě V.3.3., případně dalších vět o logaritmech.
c) Některé exponenciální rovnice se řeší logaritmováním.
d) Protože mnohé úpravy při logaritmování nejsou ekvivalentní (rozdíl je v definičních oborech původní a upravené rovnice), je třeba vždy provádět zkoušku (nebo řešit rovnici v předem určeném definičním oboru)!

Př.!

§5. Exponenciální a logaritmické nerovnice a soustavy exponenciálních a logaritmických rovnic

Pozn.: Exponenciální a logaritmické nerovnice se řeší pomocí následujících dvou vět, které plynou z V.2.1, V.3.3 a vlastností exponenciální a logaritmické funkce.

V.5.1.: $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$: a) pro $a > 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
b) pro $a \in (0;1)$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

V.5.2.: $\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{1\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$: a) pro $a > 1$: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$
b) pro $a \in (0;1)$: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

Př.